MECÂNICA GERAL - 2/2009

LISTA 6

1.
(a) Considere um planeta que orbita um sol (uma estrela) fixo. Escolha o plano xy como o plano da órbita, com o sol na origem, e use as coordenadas polares (r, ϕ) para indicar (rotular) a posição do planeta. Mostre que o momento angular do planeta em relação a esta origem tem módulo $l = mr^2\omega$, onde $\omega = \dot{\phi}$ é a velocidade angular com que o planeta orbita seu sol.
(b) Considere um corpo rígido girando com velocidade angular ω em torno de um eixo fixo. (Por exemplo, uma porta girando em torno do eixo definido pelas suas dobradiças). Escolha o eixo de rotação como o eixo z e use coordenadas (polares) cilíndricas ρ_α (distância até o eixo z), ϕ_α e z_α para especificar a posição das partículas $\alpha = 1, \cdots, N$ que compõem o corpo ("granule" o corpo rígido). Mostre que a velocidade da partícula α na direção ϕ é $\rho_\alpha\omega$ e daí conclua que a componente z do momento angular desta partícula é $m_\alpha\rho_\alpha^2\omega$. Mostre que, como consequência, a componente z do momento angular total pode ser escrita na forma $L_z = I\omega$, onde I é o momento de inércia para o eixo em questão, dado por

$$I = \Sigma m_\alpha \rho_\alpha^2$$

2. Calcule o trabalho realizado pela força bidimensional $\vec{F} = (x^2, 2xy)$ sobre tres caminhos ligando a origem ao ponto $P = (1, 1)$ e definidos abaixo:
(a) Sôbre o eixo x, vá até o ponto $Q = (1, 0)$ e depois na vertical até P.
(b) Sôbre o caminho $y = x^2$.
(c) Sôbre o caminho dado parametricamente por $x = t^3$ e $y = t^2$.

3. Uma partícula de massa m se move sobre uma mesa horizontal sem atrito, presa a uma das extremidades de um barbante de massa desprezível. O barbante passa por um orifício na mesa e eu seguro sua outra extremidade em baixo da mesa. Inicialmente a partícula se move em um círculo de raio r_0 com velocidade angular ω_0. Num certo instante eu começo a puxar o barbante até que sobre apenas um comprimento r entre o orifício e a partícula.
(a) Qual será a velocidade angular da partícula ao final deste processo?
(b) Suponha que eu puxe o barbante tão devagar que possamos aproximar a trajetória da partícula por um círculo que vai diminuindo de raio muito devagar. Calcule o trabalho feito por mim puxando o barbante.
(c) Calcule o ganho de energia cinética da partícula neste processo e compare o resultado com o do item (b).

4. Considere uma partícula em equilíbrio no topo de uma esfera fixa de raio R. Depois de um minúsculo empurrão, a partícula começa a deslizar sem atrito sobre a superfície da esfera. Determine que altura (na vertical) a partícula desce até deixar a superfície da esfera. (Sugestão: use a conservação da energia para encontrar a velocidade da partícula como função da sua altura, e a 2^a lei de Newton para encontrar a força normal que a esfera faz sobre a partícula. Qual deve ser o valor desta força normal no instante em que a partícula deixa a superfície da esfera?)

5. A força exercida por uma mola (unidimensional) presa por uma de suas extremidades é restauradora e tem módulo $F = kx$, onde x é o deslocamento de sua outra extremidade com relação à

posição de equilíbrio e k é uma constante que depende da natureza da mola.
(a) Suponha que esta força seja conservativa (o que é verdade!) e demonstre que ela está associada a uma energia potencial dada por $U = 1/2kx^2$ se escolhermos o zero da energia potencial na situação em que a mola está completamente relaxada (posição de equilíbrio).
(b) Suponha agora que a mola é suspensa do teto, com uma massa m presa a sua extremidade livre e limitada a se mover apenas na direção vertical. Encontre a distensão (ou elongação) da mola x_0 em sua nova posição de equilíbrio. Mostre que a energia potencial total (elástica mais gravitacional) tem a forma $1/2ky^2$ se a coordenada y mede o deslocamento a partir da nova posição de equilíbrio e redefinirmos o zero de energia potencial para este ponto.

6. Use a expressão da diferencial de uma função escalar f em termos de seu gradiente para demonstrar as seguintes importantes propriedades:
(a) O vetor ∇f em um ponto qualquer $\vec{r}$ é perpendicular a superfície que contém os pontos nos quais o valor de f é igual a $f(\vec{r})$ (chamada uma superfíicie equipotencial de f). (Sugestão: considere um pequeno deslocamento $d\vec{r}$ sobre a superfície equipotencial de f. Quanto vale df neste deslocamento?)
(b) A direção de ∇f em um ponto qualquer $\vec{r}$ é a direção ao longo da qual o valor de f muda mais rapidamente quando nos afastamos de $\vec{r}$. (Sugestão: considere um pequeno deslocamento $d\vec{r} = \epsilon\vec{u}$, onde $\vec{u}$ é um vetor unitário e ϵ é fixo e pequeno. Encontre qual deve ser a direção de $\vec{u}$ para a qual o df correspondente é máximo, lembrando que $\vec{a} \cdot \vec{b} = abcos(\theta)$)

7. Determine quais da forças abaixo é (são) conservativa(s) - k é uma constante com a dimensão adequada. Para aquela(s) que for(em) conservativa(s), encontre a energia potencial U associada e verifique, por diferenciação direta, que $\vec{F} = -\nabla U$.
(a) $\vec{F} = k(x, 2y, 3z)$.
(b) $\vec{F} = k(y, x, 0)$.
(c) $\vec{F} = k(-y, x, 0)$.